

Title	競合性を考慮した好ましくない施設の配置問題 (最適化の数理科学)
Author(s)	宇野, 剛史; 石井, 博昭; 斎藤, 誠慈; 大角, 盛広
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1174: 71-82
Issue Date	2000-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/64471
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

競合性を考慮した好ましくない施設の配置問題

阪大 工 宇野 剛史(Takeshi Uno)

石井 博昭(Hiroaki Ishii)

斎藤 誠慈(Seiji Saito)

Osaka University

神戸芸術工科大 芸術工 大角 盛広(Shigehiro Osumi)

Kobe Design University

1. はじめに

好ましくない施設の配置問題は最適施設配置問題の一つであり、従来様々な研究がなされてきた[2][6]. このような問題では、例えばゴミ焼却所・原子力発電所の建設などが扱われ、顧客は施設のサービスを利用したい一方で施設を嫌うことが考えられる. 従来の研究では施設配置の意思決定者は一人であったが、本研究では複数の意思決定者が競合する環境の下で施設配置を決定すると仮定した. このような状況は、施設配置に利得が絡んでくる場合に起こりうる. 好ましくない施設の配置問題に競合性を導入するために、同じく最適施設配置問題の一分野である競合施設配置問題として問題を考察する.

競合施設配置問題の研究は、Hotelling[4]を先駆者として発展してきた. Hotelling は施設を利用する顧客が線分上で一様に分布する市場において、各企業が同時に施設を配置する条件の下で、互いに競合する施設配置問題を考察した. Wendell and McKelvey[8]は顧客の分布を重みの付随する点に置き換え、ネットワーク上の問題として考察した. このネットワーク上の施設配置問題について、Hakimi[3]は企業の施設配置の決定を一度のみにし、先に施設を配置する企業と後から施設を配置する企業を仮定することにより、2つのタイプ

の問題に拡張した。ネットワーク上の競合施設配置問題の研究については, Miller, Friesz, and Tobin[7]が詳しい。また, これらの施設配置問題では, 施設-需要者間の距離が問題の主な評価基準として考察されてきた。この距離に加えて施設の質的レベルを考慮したモデルとしては, Karkazis[5]の論文が挙げられる。

本研究では, 施設-需要者間の距離に加えて施設の需要処理容量を考慮することにより, 施設のレベルの概念を導入した。そして, ネットワーク上で競合する2企業が交互に施設を配置する状況の下で, 利得最大化を目的とする問題について考察した。さらに, この状況における施設配置を好ましくない施設の配置問題に導入し, 多目的施設配置問題として考察した。

本論文における構成は以下の通りである。第2章では, 2企業が施設を交互に配置する状況の下での競合施設配置問題について定式化を行い, この問題における解として均衡解を定義する。第3章では, 好ましくない施設の配置問題について定式化を行い, 第2章で述べた競合施設配置問題と組み合わせることにより, 多目的施設配置問題として競合性を考慮した好ましくない施設の配置問題を構成する。第4章では, 本研究で取り挙げた施設配置問題の一例について数値計算を行なう。最後に第5章で本研究をまとめる。

2. 競合施設配置問題

ネットワーク $G = (N, E)$ 上の競合施設配置問題は従来から考察されてきた[3][8]。本研究では2つの企業 A, B が施設を交互に配置する仮定の下で問題を考察する。そして, 交互施設配置問題における解として均衡解を定義する。

2. 1. 交互施設配置問題

本研究では「交互」という状況を表わすために, 時刻と言う概念を用いる。時刻 $t = 0, 1, 2, \dots, T$ において, 競合する2企業 A, B は t が偶数の時には A, 奇数の時には B に手番

が回り、各手番で企業は $m(t)$ (: 自然数定数) 個施設を配置可能とする。顧客は各点上にのみ存在し、各点 $i \in N$ には需要量 w_i が付随する。施設は各点 $j \in N$ 上にのみ配置可能とし、1つの点には高々1つの施設のみ配置可能とする。各枝には各点間の距離 d_{ij} が付随する。各企業の所有する施設の配置点の集合を各々 N_A, N_B とおく。点 j における施設の総需要処理容量のレベルを l_j (: 0 以上の整数) で表わし、その上限を L_j とする。さらに、この施設の建設費を $F_j(l_j)$ 、総処理容量を $Q_j(l_j)$ とする。

各企業の施設は距離の短い需要点から優先的に需要を処理し、同じ需要点で競合した場合には距離の短い施設から優先的に利用される。ここで距離が等しい場合には先に配置された施設を優先的に利用する。これらの条件の下で、需要点 i から見た点 j 上の施設の優先度を $k \equiv k(i, j)$ (k : 自然数) で表わす。このとき、点 i 上の顧客が優先度 k 番目の点 j 上の施設によって処理される需要量 $q_i^k \equiv q_{ij}(l_j)$ は次式で与えられる:

$$q_i^k = \begin{cases} \dot{Q}_j(l_j) & \dot{Q}_j(l_j) \leq w_i - \sum_{m=1}^{k-1} q_i^m \\ w_i - \sum_{m=1}^{k-1} q_i^m & 0 \leq w_i - \sum_{m=1}^{k-1} q_i^m \leq \dot{Q}_j(l_j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、 $\dot{Q}_j(l_j)$ ($0 \leq \dot{Q}_j(l_j) \leq Q_j(l_j)$) は点 j 上の施設の残余処理能力を表わし、点 j 上の施設による需要処理後、点 i 上の顧客の需要量は $\dot{Q}_j(l_j) \rightarrow \dot{Q}_j(l_j) - q_{ij}(l_j)$ となる。

上式で与えられた需要量 $q_{ij}(l_j)$ (上式では q_i^k) を企業が得た売上げと置き換えると、各企業の利得は次式で表わされる:

$$r_j(l_j) = \sum_{i \in N} \{ \alpha \cdot q_{ij}(l_j) - \beta \cdot d_{ij} q_{ij}(l_j) \} - F_j(l_j)$$

ここで、 α, β はそれぞれ売上げ、輸送費に関する係数を表わす。各企業は利得の最大化を目的として各時刻 t における施設の場所 j ・レベル l_j を決定する。このとき、各企業の交互施設配置問題は次のように定式化できる:

問題 P^1 :

$$A \text{ の目的関数: } \max \sum_{j \in N_A} r_j(l_j)$$

$$B \text{ の目的関数: } \max \sum_{j \in N_B} r_j(l_j)$$

問題(P^1)について、各企業の目的関数を単独で解くことにはあまり意味が無い。なぜなら、どちらか一方の企業の利得最大化を目的とする時、他方の企業は明らかにどこにも施設を配置しない方が良くからである。次節では、この交互施設配置問題(P^1)において企業 A,B 双方の目的関数、すなわち利得最大化を考慮した時に現実的と考えられる解を定義する。

2. 2. 均衡解の定義

競合施設配置問題における解として、一般的に用いられている概念はゲームの理論でよく使われている「均衡」である。Hotelling[4]は Nash 均衡の概念を用いて解を与え、Hakimi[3]は後手企業の解に Nash 均衡、先手企業の解に Stackelberg 均衡の概念を用いて解を与えた。本研究における交互施設配置問題では、これらの均衡の定義を拡張した均衡解を問題 (P^1)の解として与える。

時刻 t で企業が配置する施設の点・レベルをそれぞれ $j^n(t)$, $l^n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, m(t)$) で表わすことにより、時刻 t での企業の行動を $c^n(t) = (j^n(t), l^n(t))$ で表わす。そして、時刻 t までの各企業 A,B の戦略をそれぞれ以下のように表わす:

$$s_A(t) = (c^1(1), \dots, c^{m(1)}(1), c^1(3), \dots, c^{m(3)}(3), \dots, c^1(t), \dots, c^{m(t)}(t))$$

$$s_B(t) = (c^1(2), \dots, c^{m(2)}(2), c^1(4), \dots, c^{m(4)}(4), \dots, c^1(t-1), \dots, c^{m(t-1)}(t-1))$$

ここで、上式では t が奇数、すなわち企業 A の手番における表現であり、 t が偶数の時は企業 A,B が入れ替わる。さらに、各企業の戦略における企業 A,B の利得をそれぞれ $z_A(s_A(T), s_B(T))$, $z_B(s_A(T), s_B(T))$ とおく。

今, ある終端時刻 T までにおける戦略 $s_A^*(T) = (s_A^*(t-2), c^1(t), \dots, c^{m(t)}(t), \dots)$ について, 時刻 t 以降の行動を変化させた戦略を $s_A^t(T) = (s_A^*(t-2), \hat{c}^1(t), \dots, \hat{c}^{m(t)}(t), \dots)$ とおく. さらに, このような戦略の全体集合を S_t^* とおく.

定義1. 各企業の戦略の組 $(s_A^*(T), s_B^*(T))$ が全ての時刻 t ($1 \leq t \leq T$) に対して次の2つの条件を満たすとき, この戦略の組を均衡解と呼ぶ.

- (i) 企業 A の任意の戦略 $s_A^t(T) \in S_t^*$ に対して, 企業 B が戦略集合 S_{t+1}^* の要素として企業 B の利得を最大にする戦略として

$$\tilde{s}_B^{t+1}(T) = \arg \max_{s_B^{t+1}(T) \in S_{t+1}^*} z_B(s_A^t(T), s_B^{t+1}(T))$$

を選択した時, 企業 A の利得に関して次の式が成り立つ:

$$z_A(s_A^*(T), s_B^*(T)) \leq z_A(s_A^t(T), \tilde{s}_B^{t+1}(T))$$

- (ii) 企業 B の任意の戦略 $s_B^t(T) \in S_t^*$ に対して, 企業 A が戦略集合 S_{t+1}^* の要素として企業 A の利得を最大にする戦略として

$$\tilde{s}_A^{t+1}(T) = \arg \max_{s_A^{t+1}(T) \in S_{t+1}^*} z_A(s_A^{t+1}(T), s_B^t(T))$$

を選択した時, 企業 B の利得に関して次の式が成り立つ:

$$z_B(s_A^*(T), s_B^*(T)) \leq z_B(\tilde{s}_A^{t+1}(T), s_B^t(T))$$

定義1を言い換えると, 均衡解とは「一方の企業がある時刻で先に戦略を変えた時, 他方の企業が相手の戦略に対応してその時刻以降の行動について最適戦略を採ると, 先に戦略を変えた企業は均衡解における利得と比較して得しない」という事である. 定義1で述べた均衡解は Stackelberg 均衡解の拡張になっている. 本研究では, この均衡解を問題(P¹)の解として求める.

3. 競合性を考慮した好ましくない施設の配置問題

次に、第2章で述べた競合施設配置問題を好ましくない施設の配置問題に導入する。好ましくない施設の配置問題とは、顧客は施設のサービスを利用するが、施設の存在自体については好ましくないと思っている場合に考えられる最適施設配置問題の一つである。この問題で取り上げられる施設の例としては、ごみ焼却所・原子力発電所などが考えられる。このような施設の場合、住民の反感は距離に対して非増加、レベルに対して非減少であると考えられる。本研究では施設に対する顧客の反感を「汚染度」として数量化し、これを目的関数として考慮することにより、好ましくない施設の配置問題を考察する。さらに、この目的関数と第2章で述べた交互施設配置問題における目的関数である各企業の利得とを同時に考慮した多目的施設配置問題として考察する。

3. 1. 好ましくない施設の配置問題

本章では施設配置問題における問題の定式化として第2章で与えたものをそのまま用いる。ネットワーク $G = (N, E)$ 上において、第2章と同様に顧客は各点上にのみ存在し、各需要点 $i \in N$ に存在する顧客全体の施設に対する反感度として重み w_i が付随する。そして各需要点 i で施設配置点 $j \in N$ 上の施設から受ける単位反感度あたりの汚染度関数を次式で与える：

$$Z^i(j, l_j) = \frac{1}{1 + \exp(\gamma_0 + \gamma_D \cdot d_{ij} - \gamma_L \cdot l_j)}$$

ここで、 $\gamma_0, \gamma_D, \gamma_L$ はそれぞれ汚染度の初期値、需要点-施設間の距離、施設のレベルに関する係数を表わす。

次に、好ましくない施設配置問題について以下の条件を与える：

- 企業 A, B の所有する施設の総需要処理容量の総和はネットワーク上の全 node に付随する需要量の総和を上回る。すなわち、全ての node 上の顧客はいずれかの施設のサ

ービスを受ける。

- 顧客は対象となる施設を所有する企業に対してのみ反感をもつ。すなわち、各企業の目的関数は所有する施設に対する汚染度の最小化となる。

このとき、各企業の汚染度最小化問題は以下のように表わされる：

問題 P^2 ：

$$A \text{ の目的関数: } \min \max_{i \in I} \sum_{j \in N_A} w_i \cdot Z^i(j, l_j)$$

$$B \text{ の目的関数: } \min \max_{i \in I} \sum_{j \in N_A} w_i \cdot Z^i(j, l_j)$$

$$\text{Subject to } \sum_{i \in N} w_i \leq \sum_{j \in N_A} Q_j(l_j) + \sum_{j \in N_B} Q_j(l_j)$$

問題(P^2)における解は一般に複数個求められる。しかし、顧客の立場から問題を考察するならば、各企業の汚染度を総合的に評価する必要がある。このような場合には、問題(P^2)の目的関数を一つにまとめ、

$$\min \max_{i \in I} \left\{ p_a \cdot \sum_{j \in N_A} w_i \cdot Z^i(j, l_j) + p_b \cdot \sum_{j \in N_B} w_i \cdot Z^i(j, l_j) \right\}$$

$$(p_a \geq 0, p_b \geq 0, p_a + p_b = 1)$$

を解くことにする。ここで、 p_a, p_b は顧客から見た各企業の汚染度に関する影響力の比率であり、上記の目的関数中で重みとして与える。本研究では、企業の施設配置において単独で汚染度最小化問題を考察する時には、この目的関数を用いる。

3. 2. 競合性を考慮した好ましくない施設の配置問題

3. 1節で与えた汚染度最小化問題(P^2)に利得施設配置問題(P^1)を導入することにより、好ましくない施設の配置問題に競合性を導入する。各企業の施設配置については交互施

設配置問題に基づく。また、目的関数は利得・汚染度の2つとし、制約条件は問題(P^2)で述べたものを採用する。以上により、競合性を考慮した好ましくない施設の配置問題(P)は次の多目的施設配置問題として定式化できる:

問題 P :

問題 P_A :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in N_A} r_j(l_j) \\ \min \quad & \max_{i \in I} \sum_{j \in N_A} w_i \cdot Z^i(j, l_j) \end{aligned}$$

問題 P_B :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in N_B} r_j(l_j) \\ \min \quad & \max_{i \in I} \sum_{j \in N_B} w_i \cdot Z^i(j, l_j) \end{aligned}$$

$$\text{Subject to } \sum_{i \in N} w_i \leq \sum_{j \in N_A} Q_j(l_j) + \sum_{j \in N_B} Q_j(l_j)$$

この多目的施設配置問題(P)の解は一般に複数個存在する。本研究では、問題(P)について、各企業の利得を目的関数、汚染度を制約条件として問題を構成し、複数個の解を以下の手順で求めた。

1. 汚染度を考慮しないで利得最大化問題(P^1)を解き、この状態における各企業の汚染度 M_A^1, M_B^1 を求める。(解1)
2. 単独で汚染度最小化問題(P^2)を解く。そして、この時の施設配置に対して利得最大化問題の均衡解を求め、この状態における各企業の汚染度 M_A^2, M_B^2 を求める。(解2)
3. 手順 1, 2 で求めた各企業の汚染度の汚染度を基にして、それぞれ定数 $M_A^2 < M_A < M_A^1, M_B^2 < M_B < M_B^1$ を与え、次の2式を問題(P^1)における制約

条件とする:

$$\begin{aligned} \max_{i \in I} \sum_{j \in N_A} \varpi_i \cdot Z^i(j, l_j) &\leq M_A \\ \max_{i \in I} \sum_{j \in N_B} \varpi_i \cdot Z^i(j, l_j) &\leq M_B \end{aligned}$$

そして、このときの利得最大化問題の均衡解を求める。(解3)

4. 数値計算

本章では、以下の多目的施設配置問題の例について数値計算を行なった。各点間の距離を表1で与える。各点における需要量と汚染度に関する重みを表2で与える。各点における施設のレベルの上限および各レベルに対応する施設の建設費・総需要処理容量を表3で与える。各企業の施設配置は最終時刻を $T=3$ とし、各時刻 $t=1,2,3$ について企業 A が1つ、B が2つ、A が2つ施設を順に配置する。また、売上げ・輸送費に関する係数の値をそれぞれ $\alpha=100$ 、 $\beta=2$ とし、汚染度に関する係数をそれぞれ $\gamma_0=-5$ 、 $\gamma_D=6$ 、 $\gamma_L=-4$ とする。さらに、多目的施設配置問題の制約条件として与える定数を、それぞれ以下で与える:

$$M_A = (M_A^1 + M_A^2)/2, \quad M_B = (M_B^1 + M_B^2)/2$$

表1. 各点間の距離

d_{ij}		I							
		1	2	3	4	5	6	7	8
j	1	0	2	3	5	8	9	12	12
	2	2	0	4	3	6	7	10	10
	3	3	4	0	3	5	7	9	10
	4	5	3	3	0	3	4	7	7
	5	8	6	5	3	0	5	4	5
	6	9	7	7	4	5	0	3	3
	7	12	10	9	7	4	3	0	1
	8	12	10	10	7	5	3	1	0

表2. 各点における需要量と汚染度に関する重み

i	1	2	3	4	5	6	7	8
w_i	200	150	100	300	350	250	100	150
\bar{w}_i	200	150	100	300	350	250	100	150

表3. 各点における施設のレベルの上限および各レベルに対応する施設の建設費・総需要処理容量

j		1	2	3	4	5	6	7	8
L_j		3	2	2	1	1	2	3	3
$F_j(l_j)$	$l_j = 1$	200	200	150	450	500	300	50	100
	$l_j = 2$	400	400	350			500	250	300
	$l_j = 3$	600						450	500
$Q_j(l_j)$	$l_j = 1$	300	300	300	300	300	300	300	300
	$l_j = 2$	500	500	500			500	500	500
	$l_j = 3$	700						700	700

数値計算の結果を表4に示す。表4中の解1～3は、それぞれ3. 2節で述べた番号リストに従って求めた解に対応する。解を $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ の順に見ると、各企業の汚染度に関して A,B 共に低くなっており、各企業の利得に関して A は小さく、B は大きくなっている事が分かる。これは問題(P^2)における制約条件が原因と考えられる。この需要処理容量に関する制約条件と各企業の汚染度を制約条件化したものとは、施設配置の意味について互いに相反する意味をもつ。これらの制約条件を共に達成するためには、制約条件が厳しくなるほど両企業が非協力の関係にありながら協力的行動をとる必要があると考えられる。そこで、利得最大化問題の均衡解においても協力ゲーム的な解が得られ、その結果として企業間の利得格差が小さくなったためと考えられる。

表4. 好ましくない施設の配置問題の一例における計算結果

解		1	2	3
各企業の行動 $c^n(t) = (j^n(t), l^n(t))$	$t = 1$	(7,2)	(7,2)	(3,2)
	$t = 2$	(4,1) (5,1)	(1,2) (6,1)	(1,2) (7,2)
	$t = 3$	(1,2) (6,1)	(2,1) (8,2)	(5,1) (6,1)
A の利得		97150.0	85550.0	92050.0
A の汚染度最大地域		$i = 8$	$i = 8$	$i = 8$
A の汚染度		811.9	662.6	703.3
B の利得		59050.0	67300.0	63050.0
B の汚染度最大地域		$i = 8$	$i = 8$	$i = 8$
B の汚染度		650.0	560.3	561.9

5. おわりに

本研究では、以下の事柄について考案した。

- 施設の需要処理容量に関する質的レベルを考慮したモデルを提案した。
- 3手以上の交互施設配置問題における均衡解を定義し、これを基に複数企業の利得最大化を目的とした競合施設配置問題を提案した。
- 施設が住民に与える汚染度を定式化し、住民の立場から見た汚染度最小化問題を提案した。
- 「競合施設配置問題」と「好ましくない施設の配置問題」を同時に考慮した多目的施設配置問題のモデルを提案した。

今後の課題としては、均衡解以外の解による問題の評価が挙げられる。例えば maximin 解(自企業の最低限の利得を保証する解)や minimax 解(相手企業の利得最小化を目的と

する解)などの解と均衡解とを比較する必要がある。次に、本研究では数値計算とその結果のみを示したが、より大規模な問題を解くためには均衡解を導出するための効率の良いアルゴリズムを考案する必要がある。さらに、企業双方の汚染度に関する総合的評価を行なう必要がある。

参考文献

- [1] Z. Drezner: "Competitive Location Strategies for Two Facilities," *Regional Science and Urban Economics*, Vol.12, pp.485-493 (1982).
- [2] J. Fernandez, P. Fernandez, and B. Pelegrin: "A continuous model for siting a non-noxious undesirable facility within a geographical region," *European Journal of Operational Research*, Vol.121, pp.259-274 (2000).
- [3] S. L. Hakimi: "On Locating New Facilities in a Competitive Environment," *European Journal of Operational Research*, Vol.12, pp.29-35 (1983).
- [4] H. Hotelling: "Stability in Competition," *The Economic Journal*, Vol.30, pp.41-57 (1929).
- [5] J. Karkazis: "Facilities Location in a Competitive Environment: A Promethee Based Multiple Criteria Analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol.42, pp.294-304 (1989).
- [6] E. Melachrinoudis, T. P. Cullinane: "Locating an undesirable facility with a minimax criterion," *European Journal of Operational Research*, Vol.24, pp.239-246 (1986).
- [7] T. C. Miller, T. L. Friesz, and R. L. Tobin: "Equilibrium Facility Location on Networks," Springer (1996)
- [8] R. E. Wendell, R. D. McKelvey: "New Perspective in Competitive Location Theory," *European Journal of Operational Research*, Vol.6, pp.174-182 (1981).